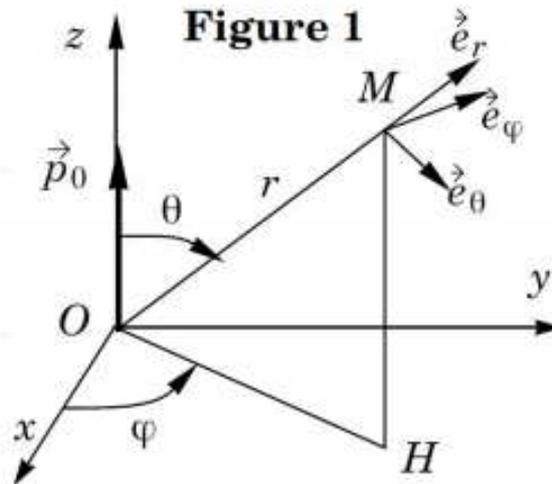


Émission et réception d'un signal électromagnétique : Le dipôle oscillant

I. Rayonnement d'un dipôle oscillant

Un dipôle oscillant de moment dipolaire $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos \omega t$ est placé à l'origine O de l'espace, le long de l'axe Oz ($\vec{p}_0 = p_0 \vec{e}_z$). On étudie le rayonnement émis en un point M repéré par ses coordonnées sphériques r, θ, φ (voir Figure 1).



1. Sous certaines conditions, le champ magnétique créé au point M par le dipôle s'écrit :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \frac{d^2}{dt^2} [\vec{p}(t - \frac{r}{c})] \wedge \vec{e}_r$$

c est la vitesse de la lumière dans le vide. Cette formule est obtenue sous certaines conditions ; les préciser et dégager leur contenu physique.

2. En notation complexe $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \exp(j\omega t)$; donner alors $\vec{B}(M, t)$ en notation complexe dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ en introduisant la norme du vecteur d'onde $k = \omega/c$.
3. Préciser la zone de rayonnement du phare si celui-ci émet un signal de fréquence 100 kHz .

Conclure.

4. Sachant que le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) possède localement la structure d'une onde plane progressive dans la direction \vec{e}_r , en déduire l'expression complexe $\vec{E}(M, t)$.
5. Définir le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M, t)$ et préciser sa signification physique. Calculer $\vec{\Pi}(M, t)$ puis sa valeur moyenne dans le temps.
6. Calculer la puissance moyenne $\langle dP \rangle$ rayonnée par le dipôle à travers la surface élémentaire de largeur angulaire $d\theta$ selon \vec{e}_θ et $d\varphi$ selon \vec{e}_φ , tracée sur la sphère de centre O et de rayon r ($r \gg \lambda$). Interpréter physiquement ce résultat ainsi que la dépendance en $1/r$ du champ électromagnétique dans la zone de rayonnement. En déduire la puissance moyenne rayonnée.

II. Réception du signal

Le navire est suffisamment éloigné du radiophare pour considérer que l'onde électromagnétique reçue par le détecteur a localement la structure d'une onde plane progressive à polarisation rectiligne. L'expression complexe du champ électrique peut alors s'écrire $\underline{\vec{E}}(M, t) = E_0 \exp j(\omega t - kx) \vec{e}_z$.

A. Amplitude du champ électromagnétique reçu

7. À partir des équations de Maxwell, établir l'équation de dispersion dans le vide.

8. Démontrer l'expression du champ $\vec{B}(M, t)$.

9. Calculer la valeur moyenne dans le temps du vecteur de Poynting en fonction de c , ϵ_0 et E_0 .

Le navire est à 30 milles marins du radiophare. Celui-ci émet une onde monochromatique de fréquence 100 kHz avec une puissance moyenne $\langle P \rangle = 20 \text{ kW}$. On suppose que les caractéristiques d'émission du radiophare sont analogues à celles du dipôle oscillant étudié dans la première partie (1 mille marin = 1852 m).

10. En déduire l'expression de l'amplitude E_0 du champ au niveau du détecteur. Application numérique.

B. Réception par un cadre détecteur

Le détecteur est un cadre carré de côté $a = 10 \text{ cm}$ sur lequel on a enroulé $N = 100$ spires de fil conducteur (voir Figure 2).

Lors de la réception de l'onde, il apparaît une force électromotrice induite e dans le cadre qui se comporte alors comme un générateur de tension. Le cadre étant supposé immobile, cette force électromotrice est égale à $e = N \times \oint_{\text{le long d'une spire}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$.

11. En partant d'une équation de Maxwell, montrer que cette force électromotrice peut s'écrire

$$e = -N \times \frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{où } \Phi_B \text{ désigne le flux de } \vec{B} \text{ à travers une spire.}$$

12. Justifier qu'il apparaît en circuit ouvert une tension électrique aux bornes A et B du fil

enroulé sur le cadre.

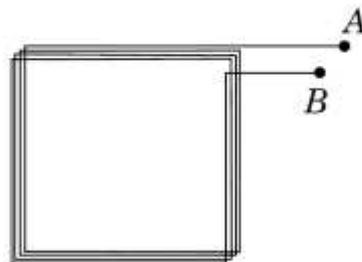


Figure 2 : cadre détecteur

On se propose d'exprimer la force électromotrice (f.e.m.) induite en partant de l'expression

$$e = -N \times \frac{d\Phi_B}{dt}$$

13. Vues les dimensions du cadre, que peut-on conclure sur la valeur du champ magnétique en tout point intérieur au cadre ? Justifier avec précision en comparant numériquement a et la longueur d'onde λ .
14. Quelle doit être l'orientation du cadre dans l'espace pour obtenir une force électromotrice d'amplitude la plus grande possible?
15. On adopte en fait l'orientation suivante (voir *Figure 3*). Déterminer alors la f.e.m. efficace e_{eff} en fonction de N , a , ω , c , E_0 .
16. Retrouver ce résultat par calcul direct à partir de la formule $e = N \times \oint_{\text{le long d'une spire}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

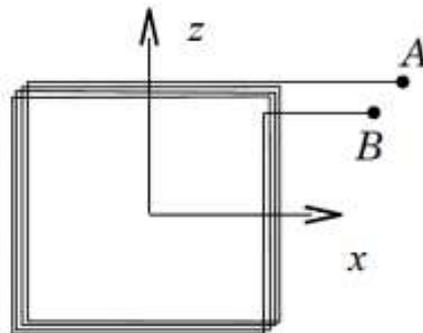


Figure 3 : orientation

17. Application numérique : Calculer la valeur efficace U de la tension obtenue entre les bornes A et B du détecteur.